कुल पृष्ठ संख्या–32 (कवर पेज सहित)

क्रम संख्या.....

माध्यमिक शिक्षा बोर्ड, राजस्थान, अजमेर

उच्च माध्यमिक परीक्षा

(परीक्षार्थी द्वारा भरा जाना चाहिये)

Candidate's Roll No. in English

(In Figures)

(In Words) ----

परीक्षार्थी का नामांक हिन्दी में

शब्दों में ----

नोट :– परीक्षार्थी उपरोक्त के अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका के अन्य किसी भी भाग में अपना नामांक नहीं लिखें।

माध्यम – हिन्दी ✓ अंग्रेजी

विषय ..... गणित .....

परीक्षा का दिन.....

दिनांक .....

नोट :– परीक्षार्थी के लिए आवश्यक निर्देश इस पृष्ठ के पिछले भाग पर उल्लेखित हैं। जिन्हें सावधानी पूर्वक पढ़ लें व पालना अवश्य करें।

परीक्षक हेतु निर्देश :– (1) परीक्षक को उपरोक्त सारणी अनुसार प्राप्तांक भरना अनिवार्य है, अन्यथा नियमानुसार दंडित किया जावेगा।

(2) परीक्षक उत्तर पुस्तिका के अन्दर के पृष्ठों के बायीं ओर निर्धारित कॉलम में लाल इंक से अंक प्रदत्त करें।

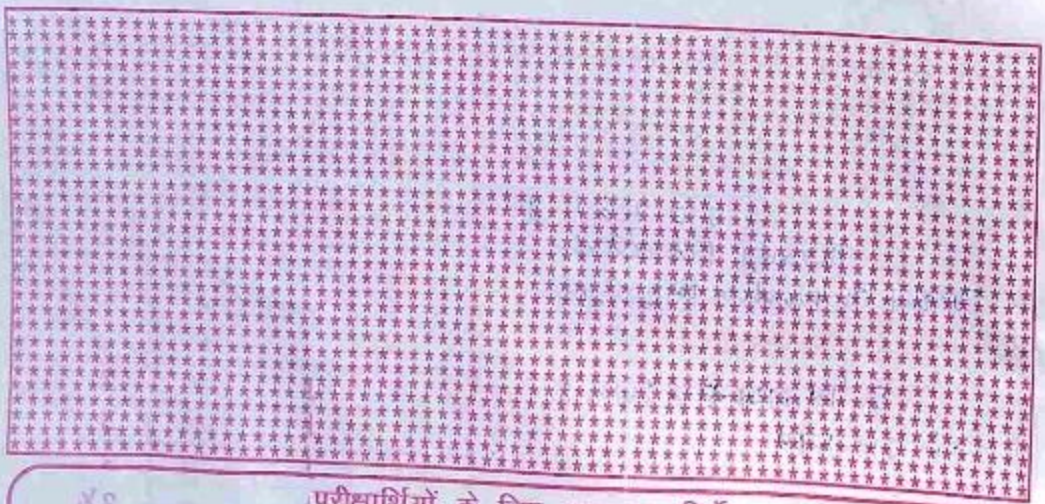
(3) कुल योग भिन्न में प्राप्त होने पर उसे पूर्णांक में ही परिवर्तित कर अंकित करें (उदाहरणार्थ : 15 ¼ को 16, 17 ½ को 18, 19 ¾ को 20)

परीक्षक के हस्ताक्षर .....संकेतांक

प्रश्नवार प्राप्तांकों की सारणी (परीक्षक के उपयोग हेतु)

प्रश्नों की क्रम संख्या	प्राप्तांक	प्रश्नों की क्रम संख्या	प्राप्तांक
1		19	
2		20	
3		21	
4		22	
5		23	
6		24	
7		25	
8		26	
9		27	
10		28	
11		29	
12		30	
13		31	
14		योग	
15		प्राप्त अंकों का कुल योग (Roundoff)	
16		अंकों में	शब्दों में
17			
18			

प्रमाणित किया जाता है कि इस उत्तर पुस्तक के निर्माण में 58 जी.एस.एम. क्रीमवोव कागज की उपयोग में लिया गया है। 158/2016



परीक्षार्थियों के लिए आवश्यक निर्देश

1. समस्त प्रश्नों का हल निर्धारित शब्द सीमा में इसी उत्तर पुस्तिका में करना है। विशेष परिस्थिति में अतिरिक्त उत्तर पुस्तिका वीक्षक से उत्तर पुस्तिका भरी हुई होने पर पर्यवेक्षक एवं वीक्षक के अनुशंसा पर ही उपलब्ध कराई जायेगी।
2. प्रश्न-पत्र पर निर्धारित स्थान पर अपना नामांक लिखें।
3. प्रश्न-पत्र हल करने के पश्चात् जिस पृष्ठ पर हल समाप्त होता है, उस पर अन्त में "समाप्त" लिखकर अन्त के सभी रिक्त पृष्ठों को तिरछी लाईन से काटें।
4. निम्न बातों का विशेष ध्यान रखें अन्यथा अनुचित साधनों की रोकथाम अधिनियम के तहत कार्यवाही की जा सकेगी।
   (i) उत्तर पुस्तिका के ऊपर/अन्दर तथा प्रश्नोत्तर के किसी भी भाग में चाही गई सूचना के अलावा अपना नामांक, नाम, पता, फोन नम्बर अथवा पहचान की कोई अन्य प्रकार की सूचना आदि अंकित नहीं करें अन्यथा "अनुचित साधनों के प्रयोग" के अन्तर्गत कार्यवाही की जावेगी।
   (ii) उत्तर पुस्तिका के पृष्ठों को फाड़ें नहीं। उत्तर-पुस्तिका के मुख पृष्ठ पर अंकित संख्या के अनुसार पृष्ठ पूरे होने चाहिये।
   (iii) परीक्षा केन्द्रों पर पुस्तक, लेख, कागज, केलक्यूलेटर, मोबाईल, पेजर आदि किसी भी प्रकार का इलेक्ट्रोनिक उपकरण तथा किसी भी प्रकार का हथियार आदि ले जाना निषेध है।
   (iv) वस्त्र, स्केल, ज्योमेट्री बॉक्स पर कुछ न लिखकर लावें। टेबल के आस-पास कोई अवैध सामग्री नहीं होनी चाहिये, इसकी जांच कर लें।
   (v) अपनी उत्तर पुस्तिका/ग्राफ/मानचित्र आदि परीक्षा भवन से बाहर ले जाना दण्डनीय अपराध है, अतः परीक्षा समाप्ति पर उत्तर पुस्तिका वीक्षक को बिना सौंपे परीक्षा कक्ष नहीं छोड़ें।
5. उत्तरों को क्रमानुसार एक ही स्थान पर लिखें। प्रश्न क्रमांक भी सही अंकित करें, अन्यथा दण्ड स्वरूप परीक्षक को 1 अंक कम करने का अधिकार है। बीच में उत्तर पुस्तिका के पृष्ठ रिक्त न छोड़ें। गणित विषय के लिए रफ कार्य उत्तर पुस्तिका के अंतिम पृष्ठों पर करें तथा तिरछी रेखा से काटें
6. जहाँ तक हो सके प्रश्न के सभी भाग के उत्तर, उत्तर पुस्तिका में एक ही स्थान पर अंकित करें।
7. भाषा विषयों को छोड़कर शेष सभी विषयों के प्रश्न-पत्र हिन्दी-अंग्रेजी दोनों भाषा में मुद्रित हैं। किसी भी प्रकार की त्रुटि/अन्तर/विरोधाभास होने पर हिन्दी भाषा के प्रश्न को ही सही माना जाये।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

① $\tan^{-1}3 + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$

$\tan^{-1}3 = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}x$

$\tan^{-1}3 = \tan^{-1}x$ $\left[\begin{array}{l}\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2} \\ \tan^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \cot^{-1}x\end{array}\right.$

अतः $\boxed{\therefore x = 3}$

② $A = |a_{ij}| \quad a_{ij} = |-5i + 2j|$

2×2 कोटि का आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

$a_{11} = |-5+2| = 3$

$a_{12} = |-5+4| = 1$

$a_{21} = |-10+2| = 8$

$a_{22} = |-10+4| = 6$

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$ Ans

③ $\begin{bmatrix} x & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2x \\ 6 \end{bmatrix} = 0$

$2x^2 - 18 = 0$

$2x^2 = 18$

$x^2 = 9, \quad \boxed{x = \pm 3}$

अतः $x = \pm 3$ Ans

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

(4) $I = \int \frac{\tan x}{\cot x} dx$

$I = \int \tan x \cdot \tan x \, dx \quad \left[\frac{1}{\cot x} = \tan x\right]$

$I = \int \tan^2 x \, dx$

$I = \int (\sec^2 x - 1) dx \quad [1 + \tan^2 x = \sec^2 x]$

$I = \int \sec^2 x dx - \int dx$

$I = \tan x - x + c$

(5) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ (चरों का पृथक्करण करने पर)

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$ [दोनों तरफ समाकलन लेने पर]

$\log y = \log x + \log c$ लेने पर

anti log

$[y = cx]$

(6) $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}, \quad \vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$

दिया है $\vec{a} \parallel \vec{b}, \ \theta = 0$

$\vec{a} \times \vec{b} = |A||B| \sin\theta = \vec{0}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या

$\vec{a} \times \vec{b} = \hat{i}(-\lambda + 10) - \hat{j}(2\lambda - 20) + \hat{k}(4+4)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$\hat{i}(-\lambda + 10) - \hat{j}(2\lambda - 20) + \hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k}$

तुलना करने पर

$-\lambda + 10 = 0, \quad \lambda = 10$

अतः $\boxed{\lambda = 10}$

(8) $\vec{r} \cdot (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = 5$ ——— (i)

$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 7$ ——— (ii)

समतल (i) व (ii) की $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ से तुलना करने पर

$\vec{n_1} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $|\vec{n_1}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$\vec{n_2} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ $|\vec{n_2}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

अतः $\cos\theta = \left| \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\,|\vec{n_2}|} \right| = \frac{(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \cdot (2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}$

$= \frac{2 - 1 - 1}{\sqrt{18}} = \frac{0}{\sqrt{18}}$

$\cos\theta = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{0}{\sqrt{3}}\right)$

$\theta = 90^\circ$

अतः समतल (i) व (ii) के मध्य कोण 90° है।

(9) $2x + y \geq 8, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0$

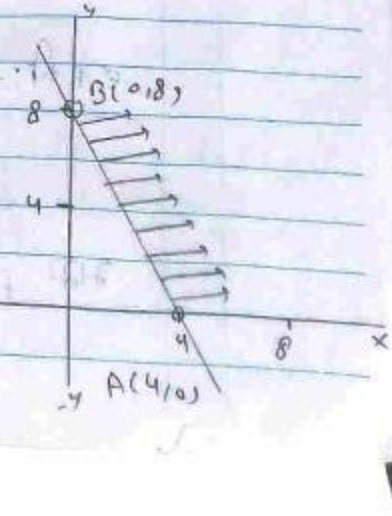
$2x + y \geq 8$ ——— (i)

असमिका (i) को समी॰ में बदलने पर

$2x + y = 8$

$x = 0, \quad y = 8 \quad (0, 8)$

$y = 0, \quad x = 4 \quad (4, 0)$



परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

अतः समी० ① अक्षों को बिंदु $A(4,0)$ तथा $B(0,8)$ पर काटती है।

अब बिन्दु ① में मूल बिंदु रखने पर

$0 \geq 8$ (असत्य)

अतः हल क्षेत्र में मूल बिंदु अनुपस्थित होगा।

अतः सुसंगत हल क्षेत्र अपरिबद्ध ताप्त क्षेत्र है।

(10) $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$

A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं

$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = 0.2 \times 0.5 = .1$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 0.2 + 0.5 - 0.1$

$= 0.6$ Ans

(11) $f(x) = 2x+3$, $f: R \to R$

f को व्युत्क्रमणीय सिद्ध करने के लिए f को एकैकी तथा आच्छादक सिद्ध करेंगे।

एकैकी:- माना $x_1, x_2 \in R$

$f(x_1) = f(x_2)$

$2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$

$2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

अतः f एकैकी है।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

आच्छादक:- $y = f(x) = 2x+3$

$y = 2x+3$

$x = \frac{y-3}{2}$

$f\left(\frac{y-3}{2}\right) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right)+3 = y-3+3 = y \in R$

अतः प्रांत के प्रत्येक अवयव का भिन्न-२ प्रतिबिंब सहप्रांत में विद्यमान है अतः f आच्छादक है।

चूंकि f एकैकी तथा आच्छादक है अतः f^{-1} विद्यमान होगा।

$y = f(x) = 2x+3$

$x = \frac{y-3}{2} = f^{-1} = g(y)$

$gof(x) = gf(x) = g(2x+3) = \frac{2x+3-3}{2} = x$

$fog(y) = fg(y) = 2\left(\frac{y-3}{2}\right)+3 = y$

अतः $f^{-1} = \left(\frac{y-3}{2}\right)$ है।

$\boxed{f^{-1} = \frac{y-3}{2}}$

(12) $\tan^{-1}\frac{2}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4} = \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

$2\left(\tan^{-1}\frac{2}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

(सिद्ध करना है।)

L.H.S. = R.H.S.

L.H.S. से

$2\left(\tan^{-1}\frac{2}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{4}\right)$

$= 2\left(\tan^{-1}\left(\frac{\frac{2}{5}+\frac{1}{4}}{1-\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}\right)\right)$ $\left[\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\right.$

$= 2\left[\tan^{-1}\left(\frac{8+5}{20}\times\frac{20}{20-2}\right)\right]$

$= 2\tan^{-1}\left(\frac{13}{34}\right) = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$= 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

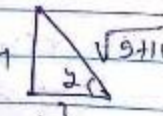
$= \tan^{-1}\left(\frac{2\times\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\right)$ $\left[2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)\right.$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{4}}\right)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{4}{4+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

माना $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = y$

$\therefore y = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$, $\tan y = \frac{4}{3}$ $\therefore \sin y = \frac{4}{5}$



$y = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$

$\therefore \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$ = R.H.S.

L.H.S = R.H.S. इतिसिद्धम्

(13) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$

$A' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

अतः सममित आव्यूह $P = \frac{A+A'}{2} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}\right)$

Scr

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -5 & -1 \\ -5 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

विषम सममित आव्यूह

$$Q = \frac{A - A'}{2} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 & 3 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

अतः $A = P + Q$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 & 3 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & -5/2 & -1/2 \\ -5/2 & 4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & -3/2 \\ 3/2 & 0 & 3 \\ 3/2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

(14) $$f(x) = \begin{cases} \frac{k\cos x}{\pi - 2x} & x \neq \frac{\pi}{2} \\ 5 & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$x = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = 5$

$x = \left(\frac{\pi}{2} + h\right)$ पर $f(x) = \frac{k\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक	प्रश्न संख्या

परीक्षार्थी उत्तर

$$f(x) = \frac{-K\sin h}{\pi - x - 2h} = \frac{K\sin h}{2h}$$

$x = \frac{\pi}{2} - h$ पर

$$f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \frac{K\cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{\pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}$$

$$= \frac{K\cos h}{\pi - \pi + 2h} = \frac{K\sin h}{2h}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ पर $R.H.L. = \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \lim_{h \to 0}$

$$= \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) = \lim_{h \to 0} \frac{K\sin h}{2h}$$

$$= \frac{K}{2}$$

$x = \frac{\pi}{2}$ पर $L.H.L.$

$$= \lim_{h \to 0} f\left(\frac{\pi}{2} - h\right) = \lim_{h \to 0} \frac{K\sin h}{2h}$$

$$= \frac{K}{2}$$

दिया गया है कि $x = \frac{\pi}{2}$ पर फलन संतत है।

$L.H.L. = R.H.L.$

$\frac{K}{2} = \frac{K}{2} = 5$, $K = 10$

$$\boxed{K = 10}$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

(15) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Diff w.r.t to x

$f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0$ से

$2x - 6 = 0, \quad x = \frac{6}{2} = 3$

$x = 3$ संख्या रेखा को दो असंयुक्त भागों $(-\infty, +3)$ तथा $(3, \infty)$ में बाटती है।

अंतराल $(-\infty, 3)$ में $f'(x) < 0$ अतः अंतराल में फलन निरंतर ह्रासमान है।

अंतराल $(3, \infty)$ में $f'(x) > 0$ अतः अंतराल $(3, \infty)$ में फलन निरंतर वर्धमान है।

फलन अंतराल	$f'(x)$ का चिह्न	फलन की प्रकृति
$(-\infty, +3)$	$(-) < 0$	ह्रासमान
$(3, \infty)$	$(+) > 0$	निरंतर वर्धमान

(i) अतः फलन $(3, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है।

(ii) फलन $(-\infty, 3)$ में निरंतर ह्रासमान है।

(16) माना वृत्त का क्षेत्रफल A है तथा त्रिज्या r है।

दिया गया है $\frac{dr}{dt} = 5 \text{ cm/s}$

वृत्त का क्षे० $A = \pi r^2$

$\therefore$ t के सापेक्ष अवकलन करने पर

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \times 6 \times 5 \quad [r = 6cm]$$

$$\frac{dA}{dt} = 60\pi \ cm^2/s$$

अतः इन का क्षेत्र $60\pi \ cm^2/s$ की दर से बढ़ रहा है।

(17) $$I = \int \frac{(x-1)(x-\log x)^3}{x} dx$$

Put $x - \log x = t$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = dt$$

$$\left(\frac{x-1}{x}\right) dx = dt$$

$$I = \int t^3 \, dt \qquad \left[\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right]$$

$$I = \frac{t^4}{4} + c = \frac{(x-\log x)^4}{4} + c$$

$$\boxed{I = \frac{(x-\log x)^4}{4} + c}$$

(18) $$I = \int \frac{1}{3x^2+6x+2} dx$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2+2x+\frac{2}{3}} dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+\frac{2}{3}}$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Scr

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+1)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\left[I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c \right]$$

$$I = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2\times\frac{1}{\sqrt{3}}} \log\left|\frac{x+1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{x+1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right| \right] + c$$

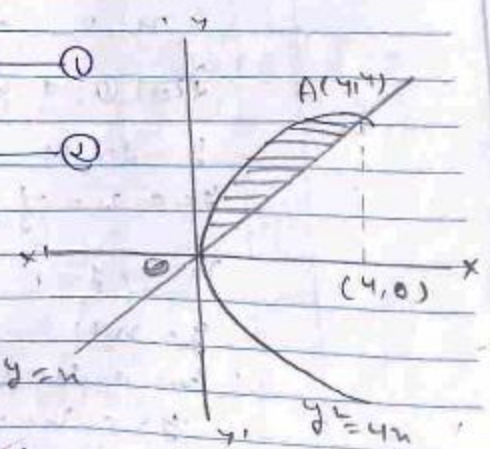
$$I = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+\sqrt{3}+1}\right| + c$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}x}{1+\sqrt{3}+\sqrt{3}x}\right| + c$$

$$I = \frac{1}{2\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3}(1+x)-1}{\sqrt{3}(1+x)+1}\right| + c$$

(19) परवलय का समी० $y^2 = 4x$ — ①

रेखा का समी० $y = x$ — ②



समी० ① एक परवलय को निरूपित करता है तो x अक्ष के सममित है।

समी० ① व ② से

$y^2 = 4x$, $y = x$

$y^2 = 4y$, $y = 4$ तथा $x = 4$

अतः रेखा ②, वक्र ① को बिंदु A(4,4) पर काटती है।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या

परीक्षार्थी उत्तर

अतः छायांकित भाग का क्षेत्र = $\int_0^4 y\,dx$ = पक्षलम्ब $\int_0^4 y\,dx$ - रेखा

$= \int_0^4 2\sqrt{x}\,dx - \int_0^4 x\,dx$

$= 2 \times \frac{2}{3}\left[x^{3/2}\right]_0^4 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4$

$= \frac{4}{3}\left[2^{2\times\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{16}{2}\right]$

$\frac{4}{3} \times 8 - 8 = \frac{32}{3} - 8 = \frac{8}{3}$ Ans

अतः छायांकित भाग का क्षेत्र $\frac{8}{3}$ है।

(20) $y = 2x+1$ — ①

$y = x+1$ — ②

$x = 2$ — ③

रेखा ① व ② का बज

$y = 2x+1$

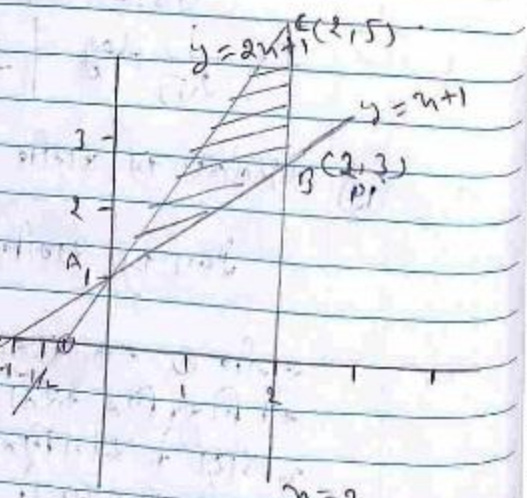
$y = 0, x = \frac{-1}{2}$ $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$

$x = 0, y = 1$ $(0,1)$

$y = x+1$

$x = 0, y = 1$, $(0,1)$

$y = 0, x = -1$, $(-1,0)$



अतः स्पष्ट है कि ① व ② बिंदु A(0,1) पर काटते है। इसी प्रकार रेखा ① व ③ बिंदु C(2,5) तथा ② व ③ (2,3) पर काटते है।

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

अतः $\triangle ABC$ का क्षे० $= \int_0^2 y\,dx - ① - \int_0^2 y\,dx - ②$

$= \int_0^2 (2x+1)dx - \int_0^2 (x+1)dx$

$= \left[\frac{2x^2}{2} + x\right]_0^2 - \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^2$

$(4+2) - (2+2)$

$= 2$ Ans

अतः छायांकित भाग का क्षे० 2 है।

(21) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ [$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ मात्रक सदिश है]

$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ दिया है।

$\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a} = ?$

$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$0 = 1 + 1 + 1 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a})$

$(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) = -\frac{3}{2}$

$\boxed{(\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}\cdot\vec{a}) = -\frac{3}{2}}$

(22) $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$2\vec{a} + \vec{b} = 2(\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) + \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$= 2\hat{i} + 4\hat{j} - 2\hat{k} + \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

$2\vec{a} + \vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - \hat{k}$

$\vec{a} - 2\vec{b} = (\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}) - 2(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$

$= \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k} - 2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

$\vec{a} + 2\vec{b} = -\hat{i} + 0\hat{j} - 3\hat{k}$

अतः $2\vec{a}+\vec{b}$ तथा $\vec{a}-2\vec{b}$ में से प्रत्येक पर लंब सदिश

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$= \hat{i}(-15) - \hat{j}(-9-1) + \hat{k}(5)$

$= -15\hat{i} + 10\hat{j} + 5\hat{k}$

माना $\vec{p} = -15\hat{i} + 10\hat{j} + 5\hat{k}$

$|\vec{p}| = \sqrt{225 + 100 + 25}$

$= \sqrt{325+50}$

$= \sqrt{375}$

$\hat{p} = \dfrac{-15\hat{i} + 10\hat{j} + 5\hat{k}}{\sqrt{375}}$

$\hat{p} = \dfrac{-15\hat{i} + 10\hat{j} + 5\hat{k}}{5\sqrt{15}}$

$\hat{p} = \dfrac{-3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{15}}$

अतः लंब मात्रक सदिश $= \dfrac{-3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}}{\sqrt{15}}$

(23)

व्यवरोध - $x + y \le 200$ — ① $z = 1000x + 600y$

$4x - y \le 0$ — ②

$x \ge 20$ — ③

असमिका ①, ② ③ को समीकरण में बदलने पर

$x + y = 200$ — ④

$4x - y = 0$, $4x = y$ — ⑤

$x = 20$ — ⑥

प्रश्न संख्या

परीक्षार्थी द्वारा प्राप्त अंक

परीक्षार्थी द्वारा

समी० (4) से

$x+y=200$

$x=0, y=200$ $(0,200)$

$y=0, x=200$ $(200,0)$

समी० (5) से

$4x-y=0, \quad y=4x$

$x=0, y=0$ $(0,0)$

$x=40 \quad y=160$ $(40,160)$

समी० (3) बिंदु $B(20,80)$ पर काटता है।

अतः समी० (4) ग्राफ को $A(200,0)$ तथा $(0,200)$ पर काटता है।

समी० (3) से

$x+y=200, \quad 4x=y$

$5y=200, \quad y=40$

$x=10$

बिंदु $(40,160)$ ग्राफ होता है।

असमिका (1) व (2) से मूल बिंदु रखने पर,

$x+y \leq 200$

$0 \geq 200$ (असत्य)

अतः हल क्षेत्र पर होगा जिसमे मूल बिंदु नही होगा।

$0 \leq 200$ (सत्य)

अतः हल क्षेत्र में मूल बिंदु उपस्थित है,

असमिका (3) में $(10,20)$ रखने पर

$40-20 \leq 0$

$20 < 0$ (असत्य)

अतः हल क्षेत्र में बिंदु $(10,20)$ अनुपस्थित होगा।

अतः सुसंगत क्षेत्र $ABCDA$ ग्राफ होता है। जिसके कोनीय बिंदु $A(200,0)$, $B(20,80)$, $C(40,160)$ तथा $D(200,0)$ ग्राफ होता है,

$Z=1000x+600y$	कोनीय बिंदु
$Z=20000$	$(20,0)$
$Z=20000+48000=68000$	$(20,80)$
$Z=80000+96000=176000$	$(40,160)$
$Z=200000$	$(200,0)$

अधिकतम

अतः अधिकतम (स्थानीय अधिकतम मान) बिंदु $(2n, 0)$ पर प्राप्त होता है।

(24) माना थैले A के चुनाव को घटना E_1 तथा थैले B के चुनाव को घटना E_2 से प्रदर्शित करते हैं।

थैले A में लाल गेंद = 2 थैले B में लाल = 3
काली गेंद = 3 काली = 4

$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

माना थैले में से लाल रंग की गेंद निकलने की घटना को A से प्रदर्शित करते हैं।

$P(A/E_1) = P$(थैले A में से निकाली गई गेंद का लाल होना)

$= \frac{2}{5}$

$P(A/E_2) = P$(थैले B में से निकाली गई गेंद का लाल होना)

$= \frac{3}{7}$

हमें $P(E_2/A) = P$(लाल गेंद थैले B में से निकाली गई है) की प्रायिकता ज्ञात करनी है।

अतः बेज-प्रमेय से

$$P(E_2/A) = \frac{P(E_2) \cdot P(A/E_2)}{P(E_1) \cdot P(A/E_1) + P(E_2) \cdot P(A/E_2)}$$

$$P(E_2/A) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{7}}$$

Scr

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$P(E_2/A) = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{1}{5}+\frac{3}{14}} = \frac{\frac{3}{14}}{\frac{14+15}{70}} = \frac{3}{14} \times \frac{70}{29}$$

$$P(E_2/A) = \frac{15}{29} \text{ Ans}$$

अतः लाल गेंद केवल्ले 0 से से निकालने की प्रायिकता $\frac{15}{29}$ है।

(25) कुल बल्ब = 30

खराब बल्ब = 6 सही बल्ब = 24

खराब बल्ब निकालने की सफलता माना है।

अतः $P(S) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

$P(F) = P$(असफलता) = P(सही बल्ब निकलना)

$P(F) = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$

माना X एक यादृच्छिक चर है जो खराब बल्बों की संख्या बताता है। टेर में से 2 बल्बों का नमूना निकाला जाता है

अतः X के संभावित मान 0, 1, 2 हैं

$P(X=0) = P$(सारे सही बल्ब) $= \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$

$P(X=1) = P$(पहला बल्ब खराब तथा दूसरा सही) + P(पहला सही तथा दूसरी खराब)

$= \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{25} + \frac{4}{25} = \frac{8}{25}$

$P(X=2) = P$(दोनों बल्ब खराब) $= \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$

अतः प्रायिकता बंटन :-

P(X)	0	1	2
P(X)	16/25	8/25	1/25

(26) $\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$

L.H.S. से

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

$R_2 \to R_2 - R_1$ [Property 5 से]
$R_3 \to R_3 - R_1$

$$= \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b-a & b^2-a^2 & a-b \\ c-a & c^2-a^2 & a+b-b-c \end{vmatrix}$$

से से कॉमन लेने पर $(b-a)$ को R_2 तथा $(c-a)$ को R_3

$$= (b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ 1 & b+a & -1 \\ 1 & c+a & -1 \end{vmatrix}$$ (Property 4 से)

$R_2 \to R_2 - R_3$

$$(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ 0 & b-c & 0 \\ 1 & c+a & -1 \end{vmatrix}$$

$$(b-a)(c-a)(b-c) \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ 0 & b+a & 0 \\ 1 & c+a & -1 \end{vmatrix}$$ (R_2 से $(b-c)$ को कॉमन लेकर)

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$= -(a-b)(b-c)(c-a) \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & c+a & -1 \end{vmatrix}$

के अनुदिश प्रसरण करने पर

C_1

$= (a-b)(a-c)(b-c) \begin{bmatrix} (-1)^{1+1} a[-1] + (-1)^{2+1}.0 + (-1)^{3+1} \\ [-b-c] \end{bmatrix}$

$= (a-b)(a-c)(b-c)[-a-b-c]$

$= (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) = R.H.S.$

$L.H.S. = R.H.S.$ इतिसिद्धम्

(27) $y = (\sin^{-1}x)^2$ — ①

सिद्ध करना है $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$

समी० ① का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx} = 2\sin^{-1}x$$

पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sqrt{1-x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2$$

$\sqrt{1-x^2}$ $\sqrt{1-x^2}$

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

हिंदी हल

(22) $$I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$\left[\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx\right]$$ प्रयोग करें

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1+\cos^2(\pi - x)}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} - I$$

$$2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}$$

Put $\cos x = t$, $x = 0, t = 1$

$-\sin x\,dx = dt$ $\quad x = \pi, t = -1$

$\sin x\,dx = -dt$

$$I = -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

Scr

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$\left(\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \right)$

$I = +\frac{\pi}{2} \left(\tan^{-1} t \right)_{-1}^{1}$

$I = +\frac{\pi}{2} \left[\tan^{-1} 1 - \tan^{-1}(-1) \right]$

$I = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$ Ans

(29) $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2x + x^2 \cot x$ — ①

समी० ① $\frac{dy}{dx} + yP = Q$ के रूप का रैखिक समी० है, जबकि

$P = \cot x$, $Q = (2x + x^2)\cot x$

$I.F = \int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = e^{\log |\sin x|}$

$= \sin x$ $\left[e^{\log c} = 1 \right]$

जिसका हल

$(I.F)\,y = \int Q (I.F)\,dx$

$y \sin x = \int (2x + x^2 \cot x) \cdot \sin x\,dx$

$y \sin x = \int 2x \sin x\,dx + \int x^2 \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sin x\,dx$

$y \sin x = 2 \int x \sin x\,dx + \int \underset{I}{x^2} \underset{II}{\cos x}\,dx$

$y \sin x = 2 \int x \sin x\,dx + I_1$ — ②

जहाँ
$$I_1 = \int \underset{I}{x^2} \underset{II}{\cos x}\, dx$$
$$I_1 = \left[x^2 \cdot \int \cos x\, dx - \int \left[\frac{d}{dx}(x^2) \cdot \int \cos x\, dx \right] dx \right]$$
$$I_1 = x^2 \cdot \sin x - \int 2x \cdot \sin x\, dx$$
समी० (2) में रखने पर
$$y \sin x = x^2 \sin x + \int 2x \sin x\, dx + 2 \int x \sin x\, dx$$
$$y \sin x = x^2 \sin x + c$$
$$y = x^2 + c \operatorname{cosec} x$$
$y \sin x = x^2 \sin x + c$ अभीष्ट हल।

(29)

(30) समतल का मॉड: जब x अक्ष पर समी०
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{2} = 1 \quad \text{---(1)}$$
समतल (1) की मूल बिंदु से दूरी = 1
समतल की बिंदु से दूरी $d = \frac{1}{\sqrt{\quad}}$

(30) रेखाओं के समी०
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{1} \quad \text{---(1)}$$
$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+1}{2} \quad \text{---(2)}$$

विषय द्वारा दत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी द्वारा

समी० $\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ से तुलना करने पर

$a_1 = 1, b_1 = -1, c_1 = 1$

$a_2 = 2, b_2 = 1, c_2 = 2$

$x_1 = 1, y_1 = 2, z_1 = 1$

$x_2 = 2, y_2 = -1, z_2 = -1$

अतः रेखाओं के मध्य न्यूनतम दूरी

$$d = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{(b_1c_2 - c_1b_2)^2 + (a_2c_1 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2}$$

$$d = \begin{vmatrix} 2-1 & -1-2 & -1-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{(-2-1)^2 + (2-2)^2 + (1+2)^2}$$

$$d = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (3)^2}$$

$$d = \left| \frac{1(-2-1) + 3(2-2) - 2(1+2)}{\sqrt{9+9}} \right| = \frac{-3-6}{\sqrt{18}} = \left(\frac{9}{\sqrt{6}}\right)$$

परीक्षक द्वारा प्रदत्त अंक | प्रश्न संख्या | परीक्षार्थी उत्तर

$$d = \frac{5 \times}{\sqrt{18}} = \frac{9}{3\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$ Ans

(7) $\frac{x}{4} = \frac{2}{4} = \frac{y}{7}$

$\frac{x}{4} - \frac{2}{4} - \frac{y}{7} = 0$

$\frac{7x - 7z - 4y}{28} = 0$

$7x - 4y - 7z = 0$

प्रश्न से सदिश रूप

$7\hat{i} - 4\hat{j} - 7\hat{k} = 0$

$a = 7, b = -4, c = -7$

$l = \frac{7}{\sqrt{49+49+16}}$, $m = \frac{-4}{\sqrt{49+49+16}}$, $n = \frac{-7}{\sqrt{49+49+16}}$

$l = \frac{7}{\sqrt{98+16}}$, $m = \frac{-4}{\sqrt{98+16}}$, $n = \frac{-7}{\sqrt{98+16}}$

$\left(\frac{7}{\sqrt{114}}, \frac{-4}{\sqrt{114}}, \frac{-7}{\sqrt{114}}\right)$

समाप्त